Cazadores de Mitos 2

Las integrales.

Sandra Kahan Nicolás Casaballe & Yasim Zeballos

¿Es difícil entender qué significado geométrico tiene una integral? Creemos que no. El siguiente resumen tiene la intención de demostrártelo. Los docentes del curso de Física General 1 no pretendemos que de la noche a la mañana te conviertas en un experto en el tema. Pero nos parece importante que comiences a escuchar "ruido del fondo" para comprender cómo se deducen algunas de las ecuaciones que modelan el comportamiento de los sistemas físicos, en particular, los referidos a la cinemática.

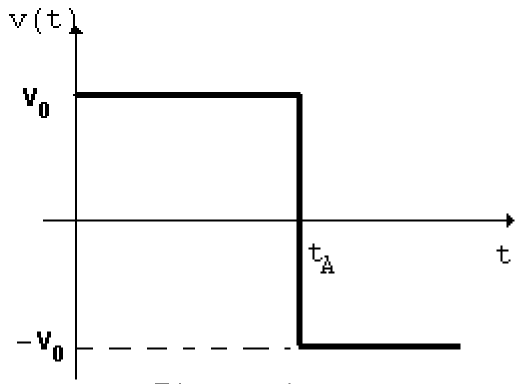


Figura 1

La figura 1 muestra una gráfica de velocidad en función del tiempo: Probablemente ya sepas que en el primer tramo (para $t < t_A$) la velocidad del objeto es constante y positiva V_0 (por ejemplo, 10 m/s), lo cual indica que el objeto avanza (en un sistema de referencia dado), mientras que en el segundo tramo (para $t > t_A$) la velocidad es negativa $-V_0$, lo cual indica que el objeto retrocede (en el mismo sistema de referencia).

¿Cuánto avanza el objeto en el primer tramo?

$$x(t_f) - x(t_i) = \Delta x(t_A) = v_0 .\Delta t = v_0 .\left(t_f - t_i\right) = v_0 .t_A$$

donde el tiempo final es t_A y el tiempo inicial es $t_i = 0$

(Si el tiempo que tarda el objeto en avanzar es t_A = 60s, lo que se desplazó en el primer tramo es 600 m)

¿Cuánto avanza el objeto en el primer tramo, a medida que el tiempo pasa?

$$\Delta x(t) = v_0\, \Delta t = v_0 \left(t_f - t_i\right) = v_0\, t$$

porque en lugar de elegir un tiempo final fijo, elegimos $t_f = t$ y, de esa forma, el desplazamiento queda como una función del tiempo. (Si la posición inicial del objeto era x_0 = 50m: x(t) = 10 t + 50, medido en **m** en el sistema MKS).

¿Podemos señalar ese desplazamiento Δx(t) en la gráfica de la figura 1? Señala tú un tiempo cualquiera en el primer tramo de la gráfica. Observa que el desplazamiento (desde que comenzó el movimiento hasta ese tiempo t) es el "área" debajo de la curva $v(t)$ o sea, el producto de la velocidad V_0 y el tiempo t

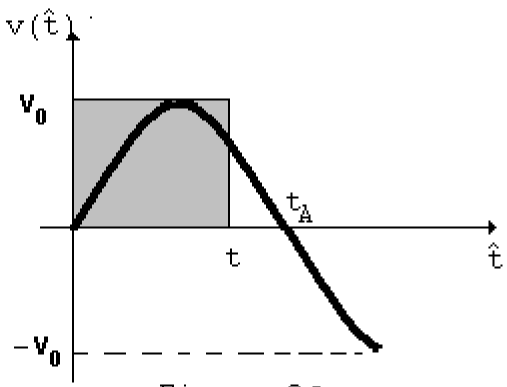


Figura 2a

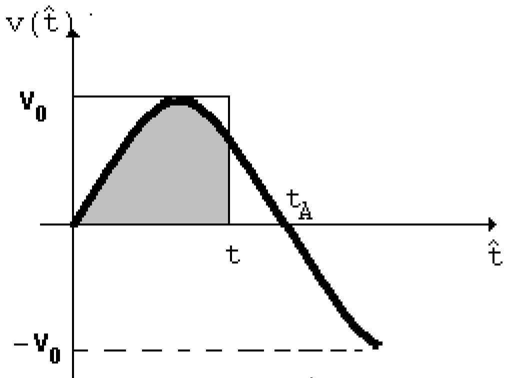


Figura 2b

La figura 1 es un modelo muy simplificado del movimiento de un objeto que avanza y retrocede. En realidad, un automóvil parte del reposo hasta llegar a una velocidad máxima V_0. Para comenzar a retroceder, debe disminuir su velocidad hasta llegar al reposo (al cabo de un tiempo t_A) y, recién ahí, comenzar a viajar en reversa. La figura 2 muestra una gráfica (velocidad en función del tiempo) que describe ese movimiento.

¿Cuál es el desplazamiento del objeto entre un tiempo t = 0 y un tiempo t cualquiera?

Las relaciones que usamos para el movimiento de la figura 1 no sirven para dar respuesta exacta a esta pregunta porque, ahora, la velocidad no es constante. En la figura 2a se muestra (de forma sombreada) el área que resulta de aplicar el producto $V_0\ t$, la cual es bastante mayor al área que encierra la curva $v(t)$ entre $t = 0$ y un tiempo t cualquiera (figura 2b). El área sombreada de esa figura representa el desplazamiento del objeto. Nuestra meta es calcular esa área.

Nos aproximamos a la meta si, como en la figura 3, dividimos el intervalo de tiempo (entre t = 0 y t cualquiera) en **n** tramos iguales de tamaño Δt y consideramos valores de velocidad constante en cada tramo. El área de cada pequeño rectángulo la podemos calcular como $V_i\ \Delta t$ y sumándolos tendríamos el área sombreada de la figura 3.

$$\Delta x(t) = x(t) - x_0 \cong v_1 \Delta t + v_2 \Delta t + ... = \sum_{i=1}^{n} v_i\ \Delta t$$

Pero el área que resulta de esa aproximación es todavía diferente al área encerrada por la curva *v(t)* (figura 2b).

¿Entonces? Si tenemos una expresión de la velocidad del objeto en cada instante (es decir *v(t)*) podemos hacer los rectángulos tan pequeños como queramos, al tiempo que podemos tomar muchos más rectángulos. Y sumando sus áreas, obtenemos (en el límite) en forma exacta el desplazamiento del objeto en función del tiempo. Esa operación se define como una integral:

$$\Delta x(t) = x(t) - x_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v_i \ \Delta t = \int_0^t v(\hat{t})\, d\hat{t}$$

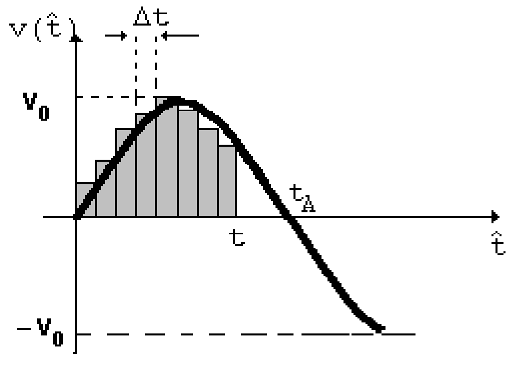
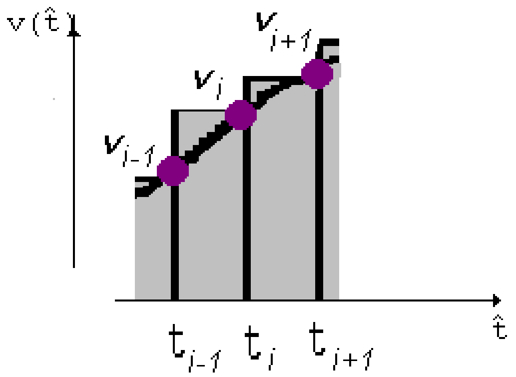


Figura 3



Ampliación

Habrás notado que hemos usado para "integral" el mismo símbolo que para "primitiva" . ¿Por qué? Porque la velocidad instantánea *v(t)* es la derivada de la posición *x(t)* . Y, por lo tanto, si tenemos la expresión *v(t)*, *x(t)* es su primitiva. Pero, además, de todas las funciones *x(t)* que derivadas nos da *v(t)*, hemos elegido aquella que verifica $x(t=0) = x_0$.

En términos generales, la integral de un función g(x) en un intervalo [a,b] se obtiene a partir de una primitiva F(x), evaluada entre los extremos del intervalo:

$$\int_a^b g(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad con \quad F'(x) = g(x)$$

Concretemos estas ideas en un ejemplo. La curva ***v(t)*** de las figuras 2 y 3 corresponde a un intervalo de una función sinusoidal. En matemática, has trabajado con funciones sinusoidales de la forma: $f_1(x)$ = sen x y sabes que su derivada es $g_1(x)$ = cos x, así como sabes que si tienes una función $f_2(x)$ = cos x, su derivada es $g_2(x)$ = -sen x.
En física, trabajar con una función sinusoidal es levemente más complicado porque esa función debe ser coherente en sus magnitudes. Así, la función sinusoidal que representa a la velocidad, deberá estar multiplicada por un parámetro **(v_0)** cuyas dimensiones sean de velocidad y cuyas unidades, en el sistema MKS, sean **m/s**.
Del mismo modo, no tiene sentido hablar del "sen t" porque la función "seno" debe aplicarse a ángulos. Por lo tanto, la expresión de la velocidad del objeto representado en la figura 2 y 3 debe ser de la forma: $v(t) = v_0 \ sen(\omega_0 \, t)$ donde ω_0 es un parámetro que debe medirse en **rad/s**. [1]

Si derivamos esa expresión, obtenemos la aceleración del móvil en el tiempo: $a(t) = \dot{v}(t) = v_0 \, \omega_0 \, \cos(\omega_0 \, t)$

Si calculamos la primitiva de *v(t)*, obtendremos la posición del objeto para un tiempo *t* cualquiera, excepto por una constante[2]:

$$x(t) = \int v(t) \ dt = \int v_0 \ sen(\omega_0 \, t) \ dt = -\frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 \, t) + C$$

Evaluemos la posición *x(t)* para los valores de parámetros que usamos a lo largo del resumen:

v_0 = 10m/s ; x_0 = 50m ; $\omega_0 = \pi / t_A$ = 0,0523 rad/s

$$x(t) = \int v(t) \ dt = \int 10 \ sen(0.0523 \, t) \ dt = -\frac{10}{0.0523} \cos(0.0523 \, t) + C$$

Como sabemos que $x_0 = x(\, t = 0 \,)$ = 50m, podemos determinar cuánto vale la constante C:

$$x(t=0) = x_0 = 50\text{m} \quad \Rightarrow \quad x(t=0) = -191 \cos(0) + C = 50 \quad \Rightarrow \quad C = 50 + 191 = 241 \text{ m}$$

Con lo cual la expresión de la posición en función del tiempo es, expresada en metros:

$$x(t) = [-191 \cos(0.0523 t) + 241] m$$

Y esa expresión, nos permitirá determinar la posición del objeto, cualquiera sea el valor que le demos al tiempo *t*. Así, es fácil comprobar que $x(t = 0)$ = 50m, que $x(t = t_A = 60s)$ = 432 m o que al cabo de 30s, justo cuando había llegado a su velocidad máxima, el objeto se había desplazado 241 m. ¿Cuánto se desplazó el objeto cuando estaba llegando a su velocidad mínima?

1 ¿Te animas a relacionar ω_0 con t_A?
2 Puedes comprobar que la derivada de *x(t)* da como resultado *v(t)*, cualquiera sea la constante *C*.

Ejemplos de determinación de primitivas:

$$\int t\, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$\int \left(t^3 + t + 4\right)dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 4t + C$$

Ejemplos de determinación de áreas:

$$\int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}t^2 \Bigg|_{t_o=0}^{t_f=1} = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2}$$

Nótese que lo que se hizo fue hallar la primitiva, donde la constante C no afecta el resultado por lo que se elige como nula. Luego, se evaluó la primitiva en su límite de integración superior (en 1), y se restó la primitiva evaluada en su límite de integración inferior (en 0).

$$\int_1^3 \left(t^3 + t + 4\right)dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 4t \Bigg|_{t_o=1}^{t_f=3} = \frac{(3)^4}{4} + \frac{(3)^2}{2} + 4(3) - \left(\frac{(1)^4}{4} + \frac{(1)^2}{2} + 4(1)\right) = 32$$

Ejemplos **con** límite de integración variable para obtener una función del tiempo:

$$\int_0^t \hat{t}\, d\hat{t} = \frac{1}{2}\hat{t}^2 \Bigg|_{\hat{t}_0=0}^{\hat{t}_f=t} = \frac{1}{2}(t)^2 - \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2}t^2$$

Nótese que lo que se hizo fue modificar el símbolo de la variable de integración para que no se confunda con el límite de integración.. Luego, se evaluó la primitiva en su límite de integración superior (en t cualquiera), y se restó la primitiva evaluada en su límite de integración inferior (en t = 0).

$$\int_1^t \left(\hat{t}^3 + \hat{t} + 4\right)d\hat{t} = \frac{\hat{t}^4}{4} + \frac{\hat{t}^2}{2} + 4\hat{t} \Bigg|_{\hat{t}_0=1}^{\hat{t}_f=t} = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 4t - \left(\frac{(1)^4}{4} + \frac{(1)^2}{2} + 4(1)\right)$$

$$\int_1^t \left(\hat{t}^3 + \hat{t} + 4\right)d\hat{t} = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 4t - \frac{19}{4}$$